Ad Soyad: ______________________

Tarih: 17.04.2026

No: ______________________

Cevap Anahtarı

Lineer Cebir II Ara Sınavı Soruları

1. (30 puan)

P_2 (derecesi en fazla 2 olan polinomlar) uzayında aşağıdaki polinomlar verilmiştir:

$$p_1(x) = 1 + x + x^2, \quad p_2(x) = 1 - x, \quad p_3(x) = 2 + x^2$$

a) $\{p_1, p_2, p_3\}$ kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını tanımı kullanarak ($c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 = 0$) kontrol ediniz.

b) Eğer küme lineer bağımlı ise, p_3 polinomunu p_1 ve p_2 cinsinden yazınız.

2. (30 puan)

$\mathbb{R}^2$ uzayında iki farklı baz veriliyor:

$$B = \{(1,1), (0,1)\}, \quad C = \{(2,1), (1,0)\}$$

a) B bazından C bazına geçiş matrisini bulunuz.

b) $[x]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ olarak verilen vektörün C bazındaki koordinatlarını B bazından C bazına geçiş matrisini kullanarak hesaplayınız.

3. (20 puan)

$\mathbb{R}^3$ vektör uzayında standart iç çarpım tanımlı olsun. Aşağıda verilen S kümesi, $\mathbb{R}^3$ için bir tabandır:

$$S = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

Gram-Schmidt kullanarak bu tabandan yola çıkarak $\mathbb{R}^3$ için ortonormal bir $\{u_1, u_2, u_3\}$ tabanı elde ediniz.

4. (10 puan)

$\vec{U}$ ve $\vec{V}$ vektörleri için $\|\vec{U}\| = 3$, $\|\vec{V}\| = 4$ ve $\|\vec{U}+\vec{V}\| = 3\sqrt{5}$ veriliyor. Buna göre $\langle \vec{U}, \vec{V} \rangle = ?$

5. (10 puan)

Boyutları aynı olan vektör uzayları izomorftur, gösteriniz.

Lineer Cebir II Ara Sınav Cevap Anahtarı

1) a) $c_1(1+x+x^2)+c_2(1-x)+c_3(2+x^2)=0$

$$(c_1+c_3)x^2+(c_1-c_2)x+(c_1+c_2+2c_3)=0x^2+0x+0$$

$c_1+c_3=0 \Rightarrow c_1=-c_3$

$c_1-c_2=0$

$c_1+c_2+2c_3=0$

$c_1+c_1+2(-c_1)=2c_1-2c_1=0$ Yani burada $c_1 \in \mathbb{R}$ olur

Dolayısıyla $(0,0,0)$ aşikar çözüm olmadığı için lineer bağımlıdırlar..

b) p_3 ü p_1 ve p_2 cinsinden yazalım

$$2+x^2=a.(1+x^2+x)+b.(1-x)$$

$2+x^2=ax^2+(a-b)x+a+b \Rightarrow \boxed{a=1}$ $a+b=2$ ✓

$a-b=0$ $\boxed{b=1}$

O halde $\boxed{p_3=p_1+p_2}$

2) a) $B \to C$ geçiş matrisi

$(1,1)=a.(2,1)+b.(1,0)$

$(0,1)=c.(2,1)+d.(1,0)$

$$\Rightarrow P_{B\to C}=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$1=2a+b$ $0=2c+d$

$\boxed{1=a}$ $\boxed{1=c}$

$b=-1$ $d=-2$

b) $[X]_C=P_{B\to C}\cdot[X]_B$

$$[X]_C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} \#$$

3) $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{u_1, u_2, u_3\}$, $\{E_1, E_2, E_3\}$

lineer bağımsız   ortogonal   ortonormal

$u_1 = v_1 = (1,1,1)$ 0,1,1   1,1,1

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$E_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \Rightarrow \|u_1\| = \sqrt{3} \Rightarrow E_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$E_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} \Rightarrow \|u_2\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$E_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} \Rightarrow E_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

4) $$\|u+v\| = \sqrt{\langle u+v, u+v\rangle} = \sqrt{\underbrace{\langle u,u\rangle}_{9} + 2\langle u,v\rangle + \underbrace{\langle v,v\rangle}_{16}}$$

$\|\bar{u}\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$

$3 = \sqrt{\langle u,u\rangle}$

$\langle u,u\rangle = 9$

$$= \sqrt{25 + 2\langle u,v\rangle}$$

$3\sqrt{5} = \sqrt{25 + 2\langle u,v\rangle}$

$45 = 25 + 2\langle u,v\rangle$

$20 = 2\langle u,v\rangle \Rightarrow \langle u,v\rangle = 10$

5). Ders notlarına bakınız